Selon la théorie des équations, si $x^2 - ax + b$ est un diviseur de $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c$, a denote la somme des racines de $x^2 - px^{n-1} + \&c = 0$; & b denote le produit de celles-ci prises deux à deux. Il y a $n \cdot \frac{n-1}{2}$ valeurs de a & de b. Si on pouvait démontrer, qu'en divisant $x^n - px^{n-1} + \&c$ par $x^2 - ax + b$, il y aurait, dans tous les cas, des valeurs possibles de a & b, qui, substituées à a & b, rendraient les termes de ce reste évanouis, on démontrerait que toute équation a un diviseur quadratique; & moyennant cela, que toute équation a autant de racines que de dimensions. Mais, en supposant ces deux termes du reste $= 0$, & éliminant une des lettres, a, b, on ne peut pas déterminer, à priori, (au moins avec facilité) à quel degré montera l'équation résultante. — Même en accordant la théorie, dont il s'agit ici, on ne peut pas en tirer la conséquence que cette équation ne montera pas au plus haut degré que $n \cdot \frac{n-1}{2}$, parce qu'en éliminant b, on introduit, peut être, des nouvelles valeurs de a, (par multiplication) qui n'appartiennent pas à la Question. — Ces Equations du degré $n \cdot \frac{n-1}{2}$ sont les Equations dont les racines sont les sommes des paires, & les produits des paires des racines de l'Equation originale. Et le principal but des articles suivants est de démontrer que les finales équations, qu'on trouverait en éliminant a ou b sont (par leur même forme) ou ces équations mêmes des sommes & produits, ou réductibles à ces formules par division. Si je n'ai pas démontré ce point-ci, d'une manière satisfaisante, c'est faute de détail. Je puis le démontrer.

En effet je démontre dans les articles suivans qu'en divisant $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c$ par $x^2 - ax + b$, & ayant

les deux termes* du reste chacun égal à 0, & éliminant b, si l'équation résultante monte à plus haute puissance de a que la $\frac{n.\overline{n-1}}{2}$ degré que le $\frac{n.\overline{n-1}}{2}$, puissance de a, & qu'on divise cette équation par l'équation dont les racines sont les sommes des paires des racines de $x^n - px^{n-1} + a = 0$, je démontre dire que le reste s'anéantira, quoi que ~~soit~~ on mette à lieu de ~~pour~~ p, q, r, a (c'est-à-dire, s'anéantira par construction, & non par les rapports qui existent entre p, q, r, a dans les cas réels — & cela moyennant que je démontre d'abord "Qu'on peut fabriquer autant de ~~vraies~~ équations d'un degré quelconque qu'on voudra, de telle nature, qu'il n'y aura qu'une seule puissance de x entre elles qui n'~~aura~~ ait pas le même coefficient dans ~~toutes~~ les différentes équations" toutes leur juste nombre de racines & dans lesquelles il y a

* Il y a [illegible] d'un rapport entre p, q, a, ~~qu'on~~ [illegible] en vérité, ils ~~sont tous~~ existent l'un de l'autre. car si $p = a + b + c$, (a, b, c étant les racines de la cubique $x^3 - px^2 + qx - r = 0$) il faut que $q = ab + ac + bc$ & sans savoir que toute équation a des racines, on ~~pourroit~~ peut imaginer que l'anéantissement dont on parle dépend du rapport entre p, q, r, a, & qu'il n'aurait pas lieu en donnant à p, q, r, a des valeurs qui n'appartiennent pas aux cas réels — N.B. par réel, je veux dire où il y a vraiment des racines.

---

* Le reste est $(a^{n-1} - pa^{n-2} - \overline{n-2}\,ba^{n-3} + qa^{n-3} + \overline{n-3}\,pba^{n-4} - ra^{n-4} \ldots\ldots - d) \times x$ $+ (-ba^{n-2} + pba^{n-3} - qba^{n-4} + \overline{n-3}\,b^2a^{n-4} \ldots\ldots\ldots + d)$ en mettant 0 & d pour le antépénultième & le pénultième terme de l'équation $x^n - px^{n-1} + a = 0$ — & c'est très facile de déterminer tous les coefficients des diverses puissances de a & de b sans actuellement faire la division de $x^n - px^{n-1} + a$ par $x^2 - ax + b$.

Article 1. Si a, b, c, &c sont les racines de l'Equation $x^n - px^{n-1} + qx = 0$, toute forme symmetrique de a, b, c, &c est susceptible d'être exprimée en termes de n, p, q, &c — Les formes de deux dimentions ~~(en~~ en termes de n & p & q; les formes de 3 dimensions en ~~termes~~ de n, p, q, r; de 4 dimensions, en termes de n, p, q, r, s. & ainsi desuite.

Apres avoir fait une demonstration de cette article, J'en ai trouvé une meilleure dans La Croix. Comp. des Elemens d'Alg.

art 2. Si a, b, c, &c sont les racines de l'Equation $x^n - px^{n-1} + qx = 0$, l'Equation des sommes des pairs (c'est-à-dire, l'équation, dont les racines sont a+b, a+c, a+d, b+c, &c.) aura tous ses coefficients exprimables en termes de n, p, q, r, &c. Ce qui arrivera pareillement à l'équation des produits des pairs (c'est-à-dire, à l'équation, dont les racines sont ab, ac, &c, bc &c.)

Par exemple, les trois premiers ~~termes~~ de l'équation des sommes des pairs sont $x^{n \cdot \frac{n-1}{2}} - \overline{n-1} \cdot p\, x^{n \cdot \frac{n-1}{n} - 1} + \left(\frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{2} p^2 + \overline{n-2} q\right) \times x^{n \cdot \frac{n-1}{1} - 2}$ &c

En general les coefficients sont les sommes des ~~produits~~ des racines a+b, a+c &c multiples 2 & 2 ensemble; 3 & 3 ensemble; &c &c & ne contiennent que des formes symmetriques, & des multiples des formes symmetriques ~~des lettres~~, a, b, ~~c &c~~ d'où (par art 1 &c) on demontre tres facilement que toutes les racines ~~symmetriques, par rapport à chacune des lettres par rapport à tout~~ ~~-vitaux~~.

Observation. Je donne le nom de l'équation des paires universellement, (soit qu'on suppose que l'équation originale a des racines, ou non) à cette formule, qui est vraiment l'Equation, dont les racines sont les bornes des paires des racines de l'équation originale, dans les cas où cette équation a des racines. Je me sers de la même manière de cette expression. Equation des produits des paires. C'est-à-dire je l'emploie universellement. Ainsi, quand je parle de ces Equations, je ne suppose pas que l'équation originale ait des racines. Je ne tombe pas dans un cercle vicieux, ni dans une Pétition de principe.

2 On dit qu'une Expression Algebrique s'anéantit formellement quand tout termes qui y entre positivement, y entre aussi negativement, ou (pour l'exprimer differemment) quand l'expression s'évanouit, quoique soient les valeurs qu'on substitue aux lettres. Par exemple, $(p^3x - p^3x)$ et $\left(\frac{p^n - p^n}{q}x - \frac{a \cdot x^3 - x^3}{q^n}\right)$ sont o formellement.

Art 3. Si A, B, C, &c, ont, chacun, une valeur réelle fixe, ils n'y peuvent avoir plus que m différentes quantités, qui, substituées dans l'expression $Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + \&c$, la font evanouir.

La Demonstration est très facile.

Art. 4. Si r soit le plus grand Exponent dans $Az^r + Bz^{r'} + Cz^{r''} + \&c$, & qu'il y a plus que r valeurs qui substituées pour z, font evanouir cette expression, pendant que les lettres, qui entrent dans A, B, C, &c restent d'un valeur fixe, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ &c

On le demontre ex absurdo, moyennant art 3.

Pr

JM 19 1986

Art 5. La racine quarrée de tout quantité ~~imaginaire du premier degré~~ impossible (c'est à dire ~~où l'exponent de la racine imaginaire est 2~~) peut être exprimée par un quantité imaginaire du premier degré.

Car la racine quarrée de $a+\sqrt{-b}$ est $\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}} + \sqrt{\frac{1}{2}a-\sqrt{a^2+b}}$, où $\frac{1}{2}a+\sqrt{a^2+b}$ est possible & positive; & $\frac{1}{2}a-\sqrt{a^2+b}$ est possible & negative.

Art 6. Si une Equation a un ~~quadratique~~ simple diviseur impossible, elle a un quadratique diviseur possible.

Soit $x+a+\sqrt{-b}$ le diviseur impossible. Donc $x+a-\sqrt{-b}$ est un diviseur aussi ∴ leur produit, ~~xx~~ c'est à dire $x^2+2ax+a^2+b$ est un diviseur.

N.B. Par quantité impossible j'entends toujours une quantité sous la forme $a+\sqrt{-b}$, ou ~~a est possible~~ ~~b est possible~~ Par impossible ~~Quadratique~~ Quadratique j'entends une quantité du 2d degré où ~~une des quantités a et b~~ (l'un ou l'autre ou tous les 2) sont impossibles. Par Quadratique ~~Quadratique~~ j'entends une Equation ~~a~~ dont les coefficients sont possibles.

Art 7. Si une ~~Quadratique~~ Equation a un diviseur Quadratique impossible, elle a un diviseur Quadratique possible.

Exponons le diviseur par $x^2+\overline{a\pm\sqrt{-b}}\,x+c\pm\sqrt{-d}$; c'est à dire par $\left(x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b\pm 2a\sqrt{-b}\mp 4c\mp 4\sqrt{-d}}\right)$ $\times\left(x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{\text{idem}}\right)$ Cette expression peut être representée par ~~$(x+m+n\sqrt{-1})\times x+p+$~~ $(x+m+n\sqrt{-1})\times(x+p+q\sqrt{-1})$ où m, n, p, q sont possibles (art 5).

∴ $x+m+n\sqrt{-1}$ est un diviseur de l'équation. ∴ (par art 6) elle a un quadratique diviseur possible.

Art 8. Si l'on multiplie un nombre quelconque par le nombre prochain inferieur, & prends le moitie du produit; & procede de la même maniere avec ce produit; c'est à dire le multiplie par (soi-meme − 1) & prends le moitie du produit. & ainsi de suite, le ~~resl~~ resultat deviendra enfin un un nombre impair.

Soit $2^n p$ le nombre, où p est impair. Le premier resultat est $2^n p \cdot \frac{2^n - 1}{2}$, ou $2^{n-1} q$, où q est impair. de même maniere le 2me resultat est $2^{n-1} q \times \frac{2^{n-1} - 1}{2}$ ou $2^{n-2} r$, où r est impair. Et ainsi de suite. Enfin nous aurons $2^{n-n} s$, qui sera impair.

Art 9. On peut fabriquer autant d'équations qu'on voudra, d'un ~~ordre quel~~ degré quelconque, qui toutes auront autant de racines que de dimensions, & qui seront parfaitement identiques entr'elles, sauf dans une seule puissance de x. C'est-à-dire, qui toutes auront ~~des~~ des differents ~~coefficients~~ progressés à une puissance donnée de x, mais les mêmes coefficients (dans toutes les équations) pour des chacune autres puissances de x.

Par exemple, on peut fabriquer 7 equations du cinquieme degré ayant chacune 5 racines, qui seront, toutes les 7, identiques, sauf dans leur derniers termes; & ces derniers termes seront tous differents.

~~Démonstration~~ Solution. ~~Demontrons~~ Designons par $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c = 0$ une équation quelconque donnée, qui contient n racines réelles positives, intégrales, qui prises deux, ~~l'un~~ a-b, b-c &c sont plus grandes ou l'ordre des plus grandes au plus petites sont $a, b, c, \&c$, & dont la différence ~~entre quelques deux~~ ~~qu'elles soient~~ ~~est 2, ou plus de 2~~ b *. Ajoutons à quelqu'un des coefficients une quantité, qui est plus petite que $\frac{1}{a+1^{n-1}}$, ~~c'est à dire~~ d'une telle nature que $l \times a+1^{n-1}$ soit au dessous de l'unité (le nombre de telles quantités est sans limites) & l'équation qui en résulte aura n racines réelles positives ~~racines~~

Car soit p le coefficient proposé. en ajoutant l à p, l'équation devient $x^n - p+l \cdot x^{n-1} + qx^{n-2} - \&c = 0$. Or, si l'on substitue $a+1$ à x dans l'équation originale $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ le résultat est un nombre positif integral. & par conséquent ~~toujours~~ si l'on substitue $a+1$ dans l'équation $x^n - p+l \cdot x^{n-1} + qx^{n-2} - \&c = 0$, le résultat, (qui ne différera ~~pas~~ ~~avec~~ ~~le~~ du précédent, que par ~~a~~ $l \cdot a+1^{n-1}$, c'est-à-dire par une quantité moindre que 1) sera positif: mais si l'on substitue ~~a~~ dans cette même équation, le résultat $(-l \cdot a^{n-1})$ sera négatif. c'est pourquoi cette équation a une racine entre a & $a+1$. De la même manière en substituant $b+1$ & b, on peut démontrer qu'elle a une racine entre ces deux nombres. &c &c

Et ~~&c~~ à plus forte raison, si au lieu de p on prend quelqu'un des autres coefficients, les mêmes raisonnements auraient ~~lieu~~ lieu. &c Q.E.D.

* par exemple en multipliant ensemble $x-1$, $x-3$, $x-5$ &c jusques à n facteurs, nous aurons une telle équation.

(Insere ici art. 10, 11)

Art 12. Divisons $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c \ldots\ldots - dx + d$ par $x^2 - ax + b$. ~~Ajoutons~~ supposons chacun des deux termes du ~~relatif~~ reste $= 0$; éliminons b: soit l'équation résultante $a^{m+l} + Pa^{m+l-1} + Qa^{m+l-2} + \&c = 0$ (où $m = \frac{n.n-1}{2}$). Cette équation ~~est nécessairement divisible sans~~ [illegible] ~~y est~~ dans sa forme générale, sans substituer ~~pour~~ à p, q, r &c est nécessairement divisible par l'équation des sommes des paires des racines de l'équation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ ~~Dlm.~~ ~~Car~~, qu'on divise, & qu'on trouve, donc ce qu'on reste ~~relatif~~ apparent $Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + Da^{m-3} + \&c$. ~~Or~~ cela posé. Si nous substituons ~~pour~~ à p, q, r &c ~~leur~~ les valeurs ~~dans~~ qu'ils ont dans quelque cas que ~~ce~~ soit réel, chacun de ces termes Ba^{m-1}, Ca^{m-2} &c s'anéantira. B égalera 0; C égalera 0; &c &c.

D'où il suit (par art) que B, C, D, &c sont égaux à 0 formalment, & non par le rapport qu'on peut imaginer d'exister entre p, q, r &c dans ces cas réels. Je vais le demontrer. Soit $B = Mp^c + Np^{c-1} + Op^{c-2} + \&c$ M, N, O &c étant fonctions de q, r, s &c (sans p). Donc en prenant quelque ~~ce~~ cas que soit cas où les racines sont réels positives & différents, on peut (par art 11) donner ~~autant~~ autant de valeurs qu'on voudra à p, dans tous les quelles, B sera 0 ∴ (par art 4) en tous les cas, où les racines sont réels positives & différents, $M = 0$, $N = 0$ &c. si on substitue leur valeurs pour q, r &c c'est à dire en tous ces cas là, $B = 0$ formalment si on substitue pour q, r &c lesquels p

De même manière en arrangeant M, N, &c selon les puissances de q on peut demontrer que dans tous les cas où les racines de $x^n - px^{n-1} + \alpha = 0$ sont réels, positives & differents, $M = 0$, $N = 0$ &c formelment. si on substitue pour r s &c leur valeurs trouvés q

En suivant la même marche on arrivera enfin a une equation $Hd^2 + Kd^{2-1} + \&c = 0$, où les H, K, &c sont fonctions ~~de une~~ des seule lettre d (~~le dernier~~ dernier coefficient de l'equation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$) & on demontra que H K &c sont 0 ~~formelment~~ en substituant pour d dans tous les cas où les racines de $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ sont réels, positives & differents. Et le nombre de ces cas est sans limite. Mais un fonction d'une seule lettre, qui devient 0, en substituant pour cette lettre plus des differents quantités qu'il y a des unités dans l'exponent ~~de la~~ de la plus grande puissance de cette lettre, est 0 formelment ∴ H K &c sont 0 formelment toujours ∴ D'où il suit que

$Hd^n + Kd^{n-1} + \&c$ est 0 formelment en tous cas.

mais cette expression est le coefficient d'une des puissances de d''; & le raisonnement s'etend à tous ∴ tous les coefficients des puissances de d'' sont 0 formelment. & ainsi on monte jusqu'à B, & démontre que $B = 0$ formelment; & comme les mêmes raisonnements s'etendent à C, à D &c ils sont, tous, 0 formelment — ce que j'entrepris de demontrer. ∴ l'article est vrai. Q E D.

Art 10. En toute équation $x^n - px^{n-1} \ldots = 0$ qui a n racines réelles positives & différentes, on peut ajouter à quelqu'un des coefficients une quantité si petite que l'équation résultante aura n racines réelles positives & différentes – et si petite même, qu'en la prenant encore plus petite, les équations resultantes auront toutes n racines réelles positives & différentes.

Soient les racines, prises en ordre $a, b, c, d \ldots$ & soit G assez grand pour que G soit moins grand que $a-b$, ou $b-c$, ou $c-d$, ou $\ldots$ ~~soit plus grand que 1~~ $\frac{1}{G}$. Soit e un nombre quelconque pour volonté, ajoutez e à $\frac{1}{G^{n-1}}$ & soit $\frac{1}{G^{n-1}}+e$ ~~ou quelque~~ la quantité

$$x^n - Mpx^{n-1} + M^2qx^{n-2} - M^3rx^{n-3} + M^4sx^{n-4} \ldots = 0,$$

est une équation, dont les racines sont $Ma, Mb, Mc \ldots$, & dont les différences des racines sont plus grands que 1.

D'où il suit (par solution art. 9) qu'en ajoutant $\frac{1}{(Ga+1)^{n-1}}+e$ (où e qui est ~~plus petite que $\frac{1}{G^{n-1}}$ ou quantité positive à volonté~~) à quelqu'un des coefficients (soit à 3ème) l'équation resultante aura (en prenant ~~le signe~~ pour ~~le dit accroissement de q~~ cas n ec. mettant f) l'équation

$$x^n - Gpx^{n-1} + \overline{Gq+f}\cdot x^{n-2} + G^3rx^{n-3} \ldots = 0 \text{ aura } n$$

racines réelles positives & différentes, $a', b', c' \ldots$

$\therefore$ divisant les racines par M ~~on aura~~

$$x^n - px^{n-1} + \overline{q+\tfrac{f}{G^2}}\cdot x^{n-2} + rx^{n-3} + sx^{n-4} \ldots = 0 \text{ aura}$$

n racines réels pos. & dif. viz $\frac{a'}{M}, \frac{b'}{M} \ldots$ Mais cette equation remplit les conditions de l'article $\therefore \ldots$ QED.

Solution

Art 11. Cor En prenant quelque cas, un, où les n racines sont réelles positives & différentes, on peut varier un des coefficients (sans changer les autres) en lui donnant autant de valeurs differentes qu'on voudra: & toutes les équations résultantes auront leur nombre complet de racines réelles positives & différentes

Art 13 Si $n.\frac{n-1}{2}$ est un nombre impair, $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c$ aura un diviseur quadratique possible, quoique ce soient $p, q, r, \&c$.

Car, en divisant par $x^2 - ax + b$, il y aura toujours des valeurs pour a & b, qui feront evanouir les deux termes du ~~reciprocat~~ reste, parcequ'en ~~effectuant~~ supposant ces deux termes $= 0$, & ~~&c~~ éliminant une des lettres, a ou b, ~~ou~~ on peut toujours réduire l'équation à l'autre lettre au degré $n.\frac{n-1}{2}$ (art 12) & toute équation d'un degré impair a, au moins, une racine possible.

Art. 14 Toute équation a un diviseur quadratique possible.

1mement Si l'exponent, n, du degré de l'équation, est impair, ou divisible par 2 sans être divisible par 4, la démonstration se trouve dans l'article précedent.

2mement Soit n, l'exponent, ~~m~~ du ~~d~~ degré de l'équation divisible par 4, mais non par 8. Soit $n = 4c$, c etant impair. divisons par $x^2 - ax + b$, & éliminons b. L'équation resultante, (reduite à l'equation des sommes des pairs, voyez art 12) montera au $4c.\frac{4c-1}{2}$ degré. posons d pour $4c-1$, & soit cette équation $a^{2cd} - pa^{2cd-1} + qa^{2cd-2} - \&c = 0$

de plus soit l'équation au lieu $b^{2cd} - Pb^{2cd-1} + Qb^{2cd-2} - \&c$ (Q & cd sera impair).

Or, si ces 2 équations avoient des racines, soit réelles, soit impossibles, l'équation originale auroit un diviseur quadratique, ou réel, ou impossible, &∴ par art 4, l'équation originale auroit un diviseur quadratique réel. Mais chacune de ces équations a une racine ou réelle ou ~~imaginaire~~ impossible, parceque (par 1re partie de cette article) ~~elles~~ elles ont un réel quadratique diviseur. ∴ &c.

3ème Soit n ~~ainsi~~ divisible par 8, mais non par 16. Soit $n = 8c$ c etant impair. divisons par $x^2 - ax + b$; eliminons. posons $8c \cdot \frac{8c-1}{2} = 4cd$ ou cd est impair, & soient les équations aux lettres a & b $a^{4cd} - pa^{4cd-1} + qa^{4cd-2} - \&c = 0$ & $b^{4cd} - Pb^{4cd-1} + Qb^{4cd-2} - \&c = 0$

Or si ces deux equations avoient &c — mais par 2ème partie de cet article) &c. &c. Et ainsi de suite.

∴ &c Q.E.D.

Art 15 Le nombre des racines d'une équation, & celui qui marque le degré de cette équation, sont égaux.

Soit l'equation (divisée par son simple facteur réel, quand le degré est impair) $x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \&c = 0$. En divisant cette equation par son quadratique diviseur, $x^2 - ax + b$, soit le quotient $x^{2m-2} - p'x^{2m-3} + q'x^{2m-4} - \&c$. En divisant ce quotient par son quadratique diviseur $x^2 - cx + d$ soit le quotient $x^{2m-4} - p''x^{2m-5} + q''x^{2m-6} - \&c$. & ainsi de suite. Donc l'expression $x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \&c = (x^2 - ax + b) \times (x^2 - cx + d) \times (x^2 - ex + f) \times \&c$ jusqu'à n diviseurs. et ses 2m racines sont $\frac{1}{2}a + \sqrt{a^2 - b}$, $\frac{1}{2}a - \sqrt{a^2 - b}$, $\frac{1}{2}c + \sqrt{c^2 - d}$, $\frac{1}{2}c - \sqrt{c^2 - d}$, &c.

Demonstration de l'theoreme que TM 19/9/16 1

Selon la théorie des Équations, si $x^2 - gx + h$ est un diviseur de $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots\ldots \pm d^n x^2 \mp dx \pm d$, g denote le somme d'une paire quelconque des racines de l'équation $x^n - px^{n-1} \ldots\ldots \pm d = 0$ & h denote le produit de la même paire; & il y a $n \cdot \frac{n-1}{2}$ valeurs de g & le même nombre de h. Si l'on pouvoit demontrer qu'en divisant $x^n - \ldots\ldots \pm d$ par $x^2 - gx + h$ il y auroit dans tous les cas des valeurs possibles de g & h qui substituées à g & h dans le reste feroient évanouir chacun des deux termes de ce reste, on demontreroit que toute équation a un diviseur quadratique; & moyennant cela que toute équation a autant de ~~dimension~~ racines que de dimensions. Mais en supposant ces deux termes du reste $= 0$, & éliminant une des lettres, g h, on ne peut pas determiner a priori (au moins avec facilité) à quel degré montera l'équation résultante. Même en accordant la théorie dont il s'agit ici, on ne peut pas en tirer la consequence que cette équation ne montera pas à un plus haut degré que $n \cdot \frac{n-1}{2}$; parceque en eliminant g, on introduit, peut-être, de nouvelles valeurs de h, (par multiplication) qui n'appartiennent

pas à la question. Ces équations à g & h du degré $n \cdot \frac{n-1}{2}$ sont les équations dont les racines sont les sommes des paires & les produits des paires des racines de l'équation originale. Et le principal but des articles suivants est de démontrer que les équations finales qu'on trouveroit en éliminant g ou h sont (par leur forme) ou ces équations mêmes des sommes & produits, ou réductibles a ces formules par division.

En effet Je démontre dans les articles suivants qu'en divisant $x^n - px^{n-1} \ldots \pm d$ par $x^2 - gx + h$, & supposant les deux termes* du reste, chacun egal à 0, & éliminant h, si l'équation resultante monte au plus haut degré que la $n \cdot \frac{n-1}{2}$ puissance de g, & qu'on divise cette equation resultante par l'équation (à la même lettre, g) dont les racines sont les sommes des paires des racines de l'équation $x^n - px^{n-1} \ldots \pm d = 0$, Je démontre dis-je, que le reste apparent après cette division sera 0 formalment, c'est-à-dire s'aneantera quoique l'on mette au lieu de p, q, r, &c; on s'aneantera par sa construction, & non par les

---

* Ce reste est

$$\left(g^{n-1} - pg^{n-2} - \overline{n-2}\, hg^{n-3} + qg^{n-3} + \overline{n-3}\, phg^{n-4} - rg^{n-4} + \frac{\overline{n-3} \cdot \overline{n-4}}{2} h^2 g^{n-5} \ldots \pm d\right) \times x$$

$$+ \left(-hg^{n-2} + phg^{n-3} - qhg^{n-4} + \overline{n-3}\, h^2 g^{n-4} \ldots \pm d\right).$$

C'est très facile de determiner tous les coefficients des diverses puissances de g & h sans actuelment faire la division de $x^n - px^{n-1} \ldots \pm d$ par $x^2 - gx + h$.

TM191916

* rapports qui existent entre p, q, r, &c dans les cas où il y a réellement des racines. & cela moyennant que je demontre d'abord ~~Bien~~ Que "l'on peut former autant des equations d'un degré quelconque qu'on voudra, qui auront, toutes, leur juste nombre de racines & dans lesquelles il n'y aura qu'une seule puissance de x, qui n'ait pas le meme coefficient dans les differentes equations.

* Il y a l'apparence d'un rapport entre ~~*~~ p, q, r, &c quoique, à la vérité ils sont independants l'une de l'autre — il y a l'apparence parcequ'par exemple dans le cas d'une cubique, si p = a+b+c (ces lettres designantes les racines) il faut que q = ab+ac+bc. — Et sans savoir que toute équation a des racines on pourroit imaginer que l'anéantissement dont il s'agit ici n'auroit pas lieu en donnant à p, q, r, &c des valeurs qui n'appartiennent pas aux cas où il y ait vraiment des racines.

Article I. Si a, b, c, &c sont les racines de l'équation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$, L'Équation des sommes des paires (c'est-à-dire l'équation, dont les racines sont $a+b$, $a+c$, $b+c$, &c &c aura tous ses coefficients exprimables en termes généraux de n, p, q, r, &c. Ce qui arrivera pareillement à L'Équation des produits des paires (c'est-à-dire, à l'équation, dont les racines sont ab, ac, bc, &c &c.).

Par exemple les trois premiers termes de l'Équation des sommes des paires sont

$$x^{n.\frac{n-1}{2}} - \overline{n-1}.p\, x^{n.\frac{n-1}{2}-1} + \left(\frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2}p^2 + \overline{n-2}.q\right).x^{n.\frac{n-1}{2}-2}$$

; Mais

En général les coefficients sont les sommes des racines ($a+b$, $a+c$ &c, ou ab, ac, &c) & les sommes des produits des racines multipliés 2 & 2 ensemble; 3 & 3 ensemble, &c &c. & ne contiennent que des formes symmetriques des lettres a, b, c &c c'est-à-dire des formes où chacune de ces lettres se trouve impliquée egalment; & on demontre tres-facilement que toute forme symmetrique de a, b, c, &c est susceptible d'être exprimée en termes de n, p, q, r, &c — Les formes de deux dimensions en termes de n, p, & q; de trois dimensions en termes de n, p, q, & r; de quatre, en termes de n, p, q, r, & s; &c &c.

TM1/1/1916

2. Observation. Je donne le nom de l'equation des sommes des paires universellement (soit qu'on suppose que l'equation originale a des racines, ou non) à cette formule, qui est vraiment l'equation dont les racines sont les sommes des paires des racines de l'equation originale dans les cas où cette equation origenale a des racines: de la même maniere je me sers de l'expression Equation des produits des paires. ~~C'est à dire je~~ l'employe universellement. Ainsi quand je parle de ces equations je ne ~~suppose~~ presume pas que l'equation originale ait des racines. Je ne tombe pas dans un cercle vicieux, ni dans une pétition de principe.

3. Definition. On dit qu'une expression algebrique s'anéantit formellement quand tout terme, qui y entre positivement, ~~y~~ entre negativement, ou (pour l'exprimer differemment) quand l'expression disparoit quoique ce soient les valeurs numeriques qu'on substitue aux lettres. Par exemple $(p^3x - p^3x)$ & $\left(\frac{p^2-p^2}{q}x - a\cdot\frac{x^3-x^3}{q^2}\right)$ sont s'formellement.

4 La racine quarrée de toute quantité imaginaire du premier degré (c'est à dire ou l'exponent de la racine imaginaire est 2) peut être exprimée par une quantité imaginaire du premier degré.

Car la racine quarrée de $a+\sqrt{-b}$ est

$\sqrt{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}} + \sqrt{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}}$, où $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}$ est possible & positif & $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}$ est possible & negatif.

5. Definition. Par ~~un~~ quantité impossible J'entend, toujours du premier degré, comme $\sqrt{-b}$ ou $a+\sqrt{-b}$. par diviseur impossible J'entends un diviseur qui a un ou plusieurs coefficients impossibles; par diviseur possible J'entends une qui a tous ses coefficients possibles.

6. Si une équation a un ~~simple~~ diviseur simple impossible, elle a un diviseur quadratique possible.

Car si $x+a+\sqrt{-b}$ est le diviseur impossible, $x+a-\sqrt{-b}$ est aussi un ~~diviseur~~ diviseur de l'équation; & consequemment, leur produit, $x^2+2ax+a^2+b$ en est un diviseur.

7. Si une équation a un diviseur quadratique impossible, elle a un diviseur quadratique possible.

Exponons le diviseur par $x^2+a\pm\sqrt{-b}\cdot x+c\pm\sqrt{-d}$, c'est-à-dire par $\left(x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b\pm 2a\sqrt{-b}-4c\mp 4\sqrt{-d}}\right)$ $\times\left(x+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{\text{idem}}\right)$ Cette expression peut être représentée par $(x+m+n\sqrt{-1})\times(x+p+q\sqrt{-1})$ où m, n, p, q sont possibles (art. 4) & consequemment l'équation a un diviseur ~~quadratique~~ simple impossible. D'où il suit (par art. 6) qu'elle a un diviseur quadratique possible.

8. Si A, B, C &c ont chacun, une valeur réelle fixe, il n'y peut pas avoir plus de m quantités differentes qui substituées à y dans l'expression $Ay^m+By^{m-1}+Cy^{m-2}+$ &c, la font evanouir.

La Demonstration est tres-facile.

9. Si r ~~soit~~ est le plus grand exponent dans $Az^r + Bz^{r'} + Cz^{r''} + \&c$, & qu'il y a plus que r valeurs, qui substituées à z, font ~~ensemble~~ cette expression egale à 0, pendant que les lettres qui entrent dans $A, B, C, \&c$ restent d'une valeur fixe, $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; &c.

On la demontre ex absurdo, moyennant l'article precedent.

10 On peut former autant d'équations qu'on voudra, d'un degré quelconque, qui toutes auront autant de racines que de dimension, & qui seront parfaitement identiques entre elles sauf dans une seule puissance de x. C'est-à-dire, qui toutes auront entre elles aux mêmes puissances de x les mêmes coefficients, hormis à une seule puissance donnée qui aura un coefficient different à chaque équation.

Par exemple on peut former 7 équations du 5ème degré, ayant chacune cinq racines, qui seront, toutes les 7, identiques sauf dans leurs derniers termes; & ces derniers termes seront tous differents.

Solution. Designons par $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c = 0$ une équation quelconque donnée, qui contient n racines réelles, positives, integrales, qui prises dans l'ordre des plus grandes aux plus petites sont $a, b, c, \&c$; & dont les differences, $a-b$, $b-c$, &c sont plus grandes que 1*; ajoutons à quelqu'un des coefficients une quantité l,

* Par exemple en multipliant ensemble $x-1$, $x-3$, $x-5$, &c jusques à n facteurs, nous aurions une telle equation

qui est plus petite que $\frac{1}{\overline{a+1}^{n-1}}$, c'est-à-dire de telle nature que $l \times \overline{a+1}^{n-1}$ soit au dessous de l'unité (& le nombre de telles quantités est illimité) & l'équation qui en resulte aura n racines réelles positives.

Demonstration. Soit p le coefficient proposé; en ajoutant l'à p nous trouvons l'équation devient $x^n - \overline{p+l} \cdot x^{n-1} + qx^{n-2} \ldots = 0$. Or si l'on substitue a+1 à x dans cette équation, le resultat sera* positif, mais si l'on substitue a, le resultat (qui sera $-la^{n-1}$) sera negatif; & consequemment cette équation a une racine entre a+1 & a. De la même manière en substituant b-1 & b on peut demontrer qu'elle a une racine entre ces deux nombres & a. Et si au lieu de p on prend quelqu'une des autres coefficients, les mêmes raisonnements auront lieu à plus forte raison.

11. En toute équation $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} \ldots = 0$ qui a n racines réelles positives & differentes, on peut ajouter à quelqu'un des coefficients une quantité si petite que l'équation resultante aura n racines réelles positives & differentes — & si petite même, qu'en la prenant encore plus petite les équations

---

* Parceque le resultat qu'on obtiendroit en substituant ce même nombre a+1 dans l'équation originale est un nombre positif integral; & le resultat dans le cas de l'équation changée ne differe pas du celui-ci que par $l \cdot \overline{a+1}^{n-1}$, c'est-à-dire que par une quantité moindre qu'unité.

resultantes auront toujours n racines réelles positives & differentes.

Solution. Soient les n racines prises en ordre $a, b, c,$ &c; & soit G assez grande ~~pour~~ pour que $\frac{1}{G}$ soit moins grande que $a-b$, ou $b-c$ ou $c-d$, ou &c. Soit e une quantité quelconque positive prise à volonté ajoute au coefficient proposé (soit le même) la quantité $\frac{1}{(Ga+1)^{n-1}}+e \times \frac{1}{G^m}$ & l'équation resultante aura n racines réelles positives & differentes

Demonstration. En multipliant les termes de l'équation originale, pris en ordre par $1, G, G^2, G^3$ &c nous avons l'équation $x^n - Gpx^{n-1} + G^2qx^{n-2} - G^3rx^{n-3} + G^4sx^{n-4}$ &c $=0$ dont les racines sont $Ga, Gb, Gc,$ &c; & (par hypothese) les differences de ces racines sont plus grandes que 1. D'où il suit (par solution d'art. 10) qu'en ajoutant $\frac{1}{(Ga+1)^{n-1}}+e$ (qui est plus petite que $\frac{1}{(Ga+1)^{n-1}}$) à quelqu'un des coefficients, l'équation resultante, par exemple (en prenant le second coefficient & mettant f pour $\frac{1}{(Ga+1)^{n-1}}+e$) l'équation $x^n - pGx^{n-1} + qG^2 + f \cdot x^{n-2} - rG^3x^{n-3}$ &c $=0$ aura n racines réelles positives & differentes, a', b', c', &c. & divisant les racines par G, l'équation

$x^n - px^{n-1} + q + \frac{f}{G^2} \cdot x^{n-2} - rx^{n-3}$ &c $=0$ aura n racines réelles positives & differentes $\frac{a'}{G}, \frac{b'}{G}, \frac{c'}{G}$ &c

Q.E.D.

12. Cor. En prenant un cas quelconque ou les n racines sont réelles, positives & differentes, on peut varier un des coefficients (pris à volonté) en lui donnant autant de valeurs differentes qu'on voudra; & toutes les équations resultantes auront leur nombre complet de racines réelles, positives & differentes.

13. Une fonction de p, q, r &c qui devient 0 toutes les fois qu'on donne à p, q, r &c les valeurs numeriques qu'ils ont dans l'équation $x^n - px^{n-1} \pm qx^{n-2} \pm rx^{n-3} \pm \&c \pm dx \mp d = 0$, quand cette équation a n racines reelles positives & differentes, est 0 formellement quoi que soient les valeurs de p, q, r &c.

Car soit cette fonction, arrangée selon les puissances de p

$Bp^m + Cp^{m-1} + Dp^{m-2} + \&c$ où B, C &c sont fonctions de q, r &c sans p. Donc en prenant un cas quelconque de l'équation $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c = 0$ où il y a n racines réelles, positives differentes, & substituant ~~les &c~~ dans ladite fonction les valeurs numeriques à ~~p~~ q, r, s &c, c'est-à-dire que substituant les valeurs numeriques à B, C &c la fonction $Bp^m + Cp^{m-1} + \&c$ s'anéantira (par hypothese) en donnant à p ~~une~~ quelque valeur ~~quelconque~~ qui ne detruit pas la supposition que l'equation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ a n racines réelles positives & differentes. c'est-à-dire qu'elle s'anéantira (par art. precedent) en donnant à p autant de valeurs qu'on voudra; D'où il suit (par art. 9) que dans un tel cas quelconque B, C &c chacun devient 0 en substituant à q, r, s &c leurs valeurs numeriques. En suivant la même marche & arrangeant B, C &c selon les puissances de q, mettant par exemple $B = B'q^{m'} + C'q^{m'-1} + \&c$ où B', C' &c sont fonctions de r, s &c sans p & q, on demontre que tous les coefficients dans ces expressions pour B, C &c deviennent 0 en substituant à r, s &c les valeurs numeriques qu'ils ont dans un cas quelconque où l'équation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ a n racines reelles positives & differentes. & ainsi de suite. Soit $Hd^v + Ld^{v-1} + \&c$ une des dernieres de ces expressions où H, L &c sont fonctions de la seule lettre d (l'antipenultième coefficient de l'équation)

& on demontre que $H, L, \&c$ deviennent 0 en donnant à d quelqu'une des valeurs qu'elle peut avoir dans les cas où l'équation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ a n racines reelles positives & differentes. mais il y a une infinité de tels cas (de telles valeurs de d) dou il suit que $H, L,$ sont 0 formellement sans substituer à d. En consequence $Hd^v + Ld^{v-1} + \&c$ est 0 formellement. mais cette expression est un des coefficients de δx; & le même raisonnement s'etend à tous. c'est-à-dire que l'expression qui s'arrange selon les puissances de d s'aneantit formellement & ainsi de suite en monte jusqu'à $B, C, \&c$ & demontre que

$Bp^m + Cp^{m-1} + \&c$ est 0 formellement. Q.E.D.

14. Divisons $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c$ par $x^2 - gx + h$; ~~supposons~~ prenons chacun des deux termes du reste $= 0$; éliminons h; soit l'équation resultante

$$q^{m+l} + Pq^{m+l-1} + Qq^{m+l-2} + \&c = 0 \quad \left(\text{où } m = \frac{n \cdot n-1}{2}\right)$$

cette equation, dans sa forme générale sans substituer à $p, q, r, \&c$ est necessairement divisible par l'équation des sommes des paires des racines de l'équation $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$. Et l'équation qu'on trouve à h en éliminant q, est necessairement divisible par l'équation des produits des paires.

Demonstration. Si on divise $q^{m+l} + Pq^{m+l-1} + \&c$ par l'équation de sommes des paires, & qu'on dénote ce qu'on trouve pour reste apparente par $Bq^{m-1} + Cq^{m-2} + Dq^{m-3} + \&c$. Cela posé, si nous substituons $x^n - px^{n-1} + \&c = 0$ à n racines, chacun de ces termes $Bq^{m-1}, Cq^{m-2}, Dq^{m-3}$ se évanouira: B egalera 0; C egalera 0; &c D'où il suit (par art precédent) que $B, C, \&c$ sont 0 formellement. Q.E.D.

15. Si $n \cdot \frac{n-1}{2}$ est un nombre impair, $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c$ aura un diviseur quadratique possible, quoique ce soient $p, q, r, \&c$ possibles pour g & h, qui feront evanoir les deux termes du reste, parcequ'en supposant ces deux termes $= 0$ & éliminant une des lettres, g ou h, on peut toujours réduire l'équation à l'autre lettre au degré $n \cdot \frac{n-1}{2}$ (voyez l'art. precedent); & toute équation d'un

degre impair a, au moins, une racine possible.

16. Toute equation a un diviseur quadratique possible.

1ment Si l'exponent n, du degré de l'équation, est impair ou divisible par 2 sans être divisible par 4, la démonstration se trouve dans l'article precedent. Mais

2ment Soit l'exponent du degre de l'équation divisible par 4, mais non par 8; soit $n = 4c$, c etant impair. Divisons par $x^2 - gx + h$, & éliminons h; l'équation resultante à g (reduite à l'equation des sommes des paires. voyez art 14) montera au degré $4c \cdot \frac{4c-1}{2}$; posons d pour $4c-1$, & soit cette equation $g^{2cd} - pg^{2cd-1} + qg^{2cd-2} + \alpha = 0$; de plus soit l'équation à h: $h^{2cd} - Ph^{2cd-1} + Qh^{2cd-2} - \alpha = 0$;

Or, si ces deux equations avoient des racines, soit réelles, soit impossibles, l'équation originale auroit un diviseur quadratique ou réel ou impossible, & consequemment (par art 1) elle auroit un diviseur quadratique réel. Mais ces deux equations ont, chacune une racine ou réelle ou impossible, parce que par 1ere partie de cette démonstration elles ont un diviseur quadratique réel. Donc

3ment Soit n divisible par 8, mais non par 16; soit $n = 8c$, c etant impair. divisons par $x^2 - gx + h$, éliminons; posons $8c \cdot \frac{8c-1}{2} = 4cd$; & soient les équations aux lettres g & h $g^{4cd} - pg^{4cd-1} + \alpha$; $h^{4cd} - Ph^{4cd-1} + \alpha$

Or, si ces deux equations avoient α (comme auparavant) .... mais ces deux equations α .. parce par 2e partie de cette démon. α. ααα... & ainsi de suite. Consequemment α. Q.E.D.

17. Le nombre des racines d'une equation & celui qui marque le degré de cette équation, sont égaux.

Soit l'équation (divisée par son simple facteur réel, quand le degré est impair) $x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \alpha = 0$; soit divisée cette équation par ~~la~~ diviseur quadratique, $x^2 - gx + h$ & le quotient par $x^2 - g'x + h'$; & le deuxieme quotient par $x^2 - g''x + h''$ & ainsi de suite. Donc le produit de ces facteurs $x^{2m} - px^{2m-1} + qx^{2m-2} - \alpha$ est ~~α~~ $(x^2 - gx + h) \times (x^2 - g'x + h) \times (x^2 - g''x + h) \times \alpha$ jusqu'à m diviseurs multipliés ensemble. & ses 2m racines sont $\frac{1}{2}g + \sqrt{g^2 - h}$, $\frac{1}{2}g - \sqrt{g^2 - h}$, $\frac{1}{2}g' + \sqrt{g'^2 - h}$, $\frac{1}{2}g' - \sqrt{g'^2 - h}$, α

Pour Demontrer a

TM 19/9/16

Selon la théorie des nos, si x-a est un diviseur de $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots$, a denote la somme de tout deux racines de $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots$ & b denote le produit de tout deux. & il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ valeurs de a, et de b. Si on pouvait demontrer que en divisant $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \dots$ par $x^2 - ax + b$, il y auroit ~~des~~ autant cas valeurs possibles de a & b, qui substituées dans le reliquit ~~fent~~ feroient chacun ~~deux~~ deux termes de ce reliquit ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, on demontreroit que ~~de~~ tout equation eût un diviseur quadratique & moyennant cela, que tout equation eut autant de racines que de unitas dans le plus haut puissance de x.

Mais en égalant ces deux termes du reliquit = 0, & delà ~~derivant~~ éliminant les lettres a & b, on ne peut pas a priori determiner (au moins avec facilité) a quel degré l'equation resultante montera — même en cedant la ~~la theorie~~ dont il s'agit ici, on ne peut pas tirer de consequence, que cette equation ne montera pas au plus haut degré que le $\frac{n(n-1)}{2}$. parce que éliminant b elle introduit peut-être des nouveaux valeurs de a (par multiplication) que n'appartiennent pas à la question. Les equations de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ sont les equations dont les racines sont les sommes des paires ~~des~~ & sommes des produits des racines de la Equation originel. Et le principe but des articles suivants est de demontrer que les finales equations qui trouveroit, en éliminant a ou b, sont (ou ces equations des paires & produits, ou reductibles a ces formules par division - Je ne pas demontrer ce point ici d'une maniere solide faute cet partie de detail. Je puis le demontrer.

Je crois d'avoir demontre

~~If there be a certain number~~

Si il y a un certain nombre quelconque de lettres a b, c &c, par une forme ~~simple~~ symmetrique de ces lettres je entends leur somme ou la somme de leur quarrées, ou de leur cubes ou &c. Par une forme de deux lettres je ~~entends~~ entends la somme de toutes les $a^m b^n$ ~~avec~~ $a^n b^m$ ~~c~~ a^n (où m & n peuvent être =, ou non) c'est a dire j'entends la somme de tous les produits, qu'on peut faire en combinant (par multiplication) quelque puissance (donnée) d'une lettre avec quelque puissance d'une autre lettre.

Exemples

Soient 4 lettres a, b, c, d. donc

Ex 1. $a^5 + b^5 + c^5 + d^5$ est une ~~simple~~ ~~forme~~ ~~de~~ ~~quelque~~ ~~puissance~~

Ex 2 $a^2b + a^2c + a^2d + ba + b^2c + b^2d + c^2a + c^2b + c^2d + d^2a + d^2b + d^2c$ est un double forme

~~Soient 3 lettres a b c. donc~~

3 Ex. $a^n b^n + a^n c^n + a^n d^n + b^n c^n + b^n d^n + c^n d^n$ est un ~~autre~~ double forme

Soient 3 lettres a, b, c. donc

Ex 4 : $a^n b^n c^n + a^n c^n b + b^n c^n a$ est un triple forme

voyez l'exemplaire

Ces dimensions d'une forme est la somme des exposants dans quelqu'un que ce soit de ses termes. ~~par exemple~~ ainsi $Ex\,1$ est de 5 dimensions $Ex\,2$ sont 13 est de 3. $Ex\,4$ est de 9 dimensions.

1 Si a, b, c &c sont les racines symétrique de la Equation $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c = 0$ toute forme de a, b, c &c est susceptible d'être exprime en termes de n, p, q &c. Les formes de 2 dimensions en termes de n & p. Les formes de 3 dimensions en termes de n, p, q &c. Les formes de 4 dimensions en termes de n, p, q, r, s. &c ainsi de suite.

La demonstration n'est pas difficile. En montrant ~~des~~ ces formes de 2 lettres aux formes de 3 lettres ~~de ainsi~~ c'est a dire avoir fait une demonstration de cette ~~et tels~~ des 2 & 3 lettres. Je n'ai trouvé aucune difficulté dans la chose. Complement

Si ~~&c~~ a, b, c &c sont les racines de l'Equation $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \&c$, l'Equation des sommes des pairs c'est a dire l'Equation dont les racines sont $a+b$, $a+c$ &c $b+c$ &c ~~ser~~ aura toutes ses coefficients exprimables en termes de n, p, q &c. Ce qui arrivera pareillement a l'Eq. des produits des pairs c'est a dire a l'Eq. dont les racines sont ab ac &c bc &c

Par exemple les 3 premiers termes de l'Equation des dernières des pairs sont $x^{n \cdot \frac{n-1}{2}} - \overline{n-1} \cdot p\, x^{n \cdot \frac{n-1}{2} - 1} + \left(\frac{\overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{2} p^2 + \overline{n-2}\, q\right) x^{n \cdot \frac{n-1}{2} - 2}$

En general les coefficients sont les sommes des produits des racines $a+b$ $a+c$ &c ou a multiplie de deux ensemble; trois a trois

4

ensemble. &c & consistent des formes* scetant complettes &
des multiples des formes complettes des lettres a b c &c.
Dou par le dernier article &c.

* complettes parceque chacun lettre paut rationnelle vivolitiers

Je donne le nom de l'Equation des sommes des pairs (universalment, soit qu'on suppose ou originale ait des racines ou non) à ce formule qui est vraiment l'Equation dont les racines sont les sommes des pairs des racines de l'Eqn originale, dans les cas ou celle eqn originale a des racines.

En pareille façon je me sers des phraze Equation des produits des pairs ~~c'est~~ cinq ~~dit~~ Je l'emploie universellement. ~~C'est pourquoi~~ ~~dit~~ ~~quand je~~ parle ~~de~~ ces equation je n'assume pas que le Eqn originel a des racines. Je ne me egare pas dans le circle vicieux ni dans un petitio principii

On dit qu'une Expression Algebraique s'annantit formellement ou quant elle tout le terme qui y entre positivement, y entre negativement, ou, (pour l'expriner differemment) quant l'expression s'annantit quoique se soient les valeurs qu'on substitue pour les lettres. Par exemple $(px - p^2 x)$ est $= 0$ formelment

de même $\frac{pr - p^2}{q} \cdot x - \frac{a \cdot \sqrt{r} \cdot x^2}{q^2}$

Si A, B, C, &c ont chacun un valeur reel fixe il n'y pourroit etre plus qu'un different valeur quantités qui substituées en $Ay^{m} + By^{m'} + Cy^{m''}$ &c le font evanouir

TM19/1916

Demonstration. Soient a, b, c m différentes valeurs qui font cette expression $= 0$. Donc puisque chacun des m quantités $y-a$, $y-b$, $y-c$, &c. puisse diviser sans reste $y^m + \frac{B}{A} y^{m-1} + \frac{C}{A} y^{m-2} + \&c$, cette expression est $y-a \times y-b \times y-c \times \&c$, et $Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} + \&c$ est $A \cdot y-a \cdot y-b \cdot y-c \cdot \&c$ qui ne peut pas être nulle que quand on substitue pour y ou a, ou b, ou c &c. parce que en tout autre cas nous aurons un ou quelques des facteurs évanouis.

Si x soit le plus grand exposant dans $Az^x + Bz^{x'} + Cz^{x''} + \&c$, & qu'il y a plus que x valeurs qui substituées pour z font cette expression évanouir pendant que les lettres qui entrent dans $A, B, C, \&c$ restent d'une valeur fixe, $A = 0$ $B = 0$ &c.

Lemme. Donnons par $Qz^m + Rz^{m'}$ &c cette part de l'expression dont les coefficients n'évanouissent ~~est un vector~~ ~~rat~~ s'il était possible qu'il y avoit une telle part,

Donc, vu que m (comme nous) n'a pas de plus grand que x, & vu que en substituant pour y, il n'importe pas si on garde toute l'expression, ou formettant tous les termes dont les coeff^{ts} $= 0$, jusqu'à ce que les autres seulement

Il suit, par hypothèse, que il y a plus que m valeurs différentes qui substituées dans $Qz^m + Rz^{m'}$ &c le font évanouir, Q, R &c. n'ont chacun une valeur réel qui contrarie le dernier

Q.E.D.

On peut fabriquer autant de equations qu'on voudra dans ~~x~~ ~~x~~ quelconque, que tous auront autant des racines que des dernieres, & que seront parfaitement le meme identique ~~en a un seul coté~~ entre eux seuls dans une seule puissance de x c'est à dire, qui tous auront des differents coefficients ~~pour une~~ à une puissance donnée de x, mais les mêmes coefficients ~~dans tous equations~~ ~~pour tous les~~ à chaque puissance autres ~~coefficients~~ de x.

[Par ex. on peut fabriquer 7 equations du cinquième degré, ayant chacune 5 racines reelles qui seront tous les 7 identiques sauf dans leurs bornieres termes, & ses derniers termes seront tous differents.]

Car ~~soit~~ donnons par $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} = 0$ un equation quelconque donnée, qui contient n racines reelles positives integrales, ~~a, b, c &c dont a~~ qui arrives dans l'ordre de plus grand à plus petite sont a, b, c &c dont le differences entre quelque deux est 2 ou plus. & ajoute à quelques des coefficients qu'en quantité qui est plus petite que $\frac{1}{a \times 1^{n-1}}$ (c'est à dire la plus petite est d'un) & l'equation que resulte aura n real positives racines (c'est à dire que multiplie avec ces ~~racines~~ fait un produit au dessous l'unité)

Car soit h le coefficient proposée. en ajoutant l'equation devient $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} + h$ or si on substitue $a+1$ dans $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2}$ le correspondant le resultat est un nombre positif integral. ideoque si on substitue ~~a+1~~ dans $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} + h$ le resultat (que ne differe pas) en multipliant ensemble $x-1$, $x-2$, $x-3$ &c on aura une telle

& demontre que $n=0$ formalment & comme les meme raisonnements s'etend c.d.d. ils sont tous o pr meme ce que je entreprois de demontrer
∴ Cette est vrai. c.q.d.

---

* ce Reliquat est nothing

$(a^{n-1} - pa^{n-2} - \overline{n-2}\, ba^{n-3} + qa^{n-3} + \overline{n-3}\, pba^{n-4} - ra^{n-4} \ldots\ldots d) \times x$
$+ (-ba^{n-2} + pba^{n-3} - qba^{n-4} + \overline{n-3}\, bra^{n-4} \ldots\ldots + d)$

& cest tres facile de determiner tout les coefficients des diverses puissances de a & b sans faire une division actuelle de $x^n - px^{n-1} \ldots + dx + d$ par $x - a - b$

Le racine quarré de tout quantité imaginaire du premier degré (cest a dire in l'exposant de la racine imaginaire est 2) est du premier peut etre exprimé par un quantité imaginaire du premier degré

Car ~~$\sqrt{a+\sqrt{-b}}$~~ la racine quarrée de $a+\sqrt{-b}$ est $\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}} + \sqrt{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b}}$, où $\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2+b}$ est pos & positif & $\frac{1}{2}a + \sqrt{a^2+b}$ est pos & negatif

Si une equation a un diviseur imaginaire simple elle a un diviseur quadratic avec coefficients possibles

Soit $x+a+\sqrt{-b}$ le diviseur imaginaire. donc $x+a-\sqrt{-b}$ est un diviseur aussi. ∴ $x^2+2ax+a^2+b$ est un diviseur

Si une équation a un diviseur quadratic avec coefficients simplement impossible, elle a une diviseur quadratic avec coefficients possibles

Soit $x^2 + a \pm b\sqrt{-1} \cdot x + c \pm \sqrt{-d}$ le diviseur

Donc les diviseurs de cette expression sont diviseurs de l'équation

Exprimons le diviseur par $x^2 + a \pm \sqrt{b}\, x + c \pm \sqrt{-d}$

c'est à dire par $\left(x + \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 \pm 2ab + 4c \pm 4\sqrt{-d}}\right)$

$\times \left(x + \frac{1}{2}a - \sqrt{\text{idem}}\right)$ cette expression peut être

exprimée (ainsi) ~~par (x ...)~~ $\times\ x + r \pm s$

par $(x + m + n\sqrt{-1}) \times (x + p + q\sqrt{-1})$ où m et n sont réelles

$\therefore$ $x + m + n\sqrt{-1}$ est un diviseur de l'équ

$\therefore$ par ainsi ~~xa~~ elle a un quadratic avec coeff possibles.

Si on multiplie un nombre quelconque ~~par~~ par le nombre prochain inferieur, et prend la moitié du produit, et procede de la meme maniere avec ce produit c'est à dire le multiplie par (seulement) et prend le moitié du produit, et ainsi de suite le resultat deviendra enfin un nombre impair

Soit $2^n p$ le nombre, où p est impair. Le premier resultat est $2^n p \times \frac{2^{n-1}}{2}$ ou $2^{n-1} \times p \cdot 2^{n-1}$ ou $2^{n-1} q$, où q est impair. De meme maniere le resultat sera $2^{n-2} r$, où r est impair, et considérant ainsi nous aurons $2^{n-n} s$ qui sera impair.

Si n. $\frac{n-1}{2}$ est un nombre impair

$x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + \&c$ aura un diviseur quadratique possible, quoi que se soient p, q, r &c.

Car divisant par $x^2 - ax - b$. il y aura toujours des valeurs pour a & b que feront les deux termes du reliquat $= 0$ parce que en assumant ces deux termes $= 0$ & éliminant en tout les lettres a et b, on peut toujours réduire l'equation a la forme (par art 7) pour a une equation du n. $\frac{n}{2}$ degré a tout equation d'un degré impair a au moins une racine possible.

Tout Equation a un diviseur quadratique avec dont les coefficients sont possibles

Si le reliquat est divisible par 2 ou du deux pot 4, le reliquat du degré d'equation divisible par 4 mais pas par 8 : soit $x = 4\theta$, c'est évidemment diviseur par $x^2 - ax + b$, éliminant b & ~~soit~~ equation resultante (reduite a l'equation des sommes des puissances) montera au $\frac{n}{2}$ degré pour θ pour x & soit cette equation $\theta^{2cd} - p\theta^{2cd-1} + q\theta^{2cd-2} - \&c$

De plus soit l'equation au b $P^{2cd} - Pb^{2cd-1} + Qb^{2cd-2} + \&c$

& cd sera impair

Or si ces deux equations avoient des racines soit reelles soit imaginaires impossible, l'equation originale auroit un diviseur quadratique ~~dont les coeffs auroient ou~~ ou réel ou impossible ~~réel ou imaginaire~~ &c. par art 8 equation original auroit un diviseur quadratique réel. Mais chacun de ces equation a une racine ou réel ou imaginaire parce que par le dernier article elles ont un réel quadratique diviseur &c.

3° Soit m divisible par 8 mais pas par 16. Soit $n = 2c$, c étant impair

divisant par $x - a + b$ et $x - c + d$

posons $2c \cdot \frac{2c-2}{2} = 4cd$ où cd est impair

et soient les équations en a et en b

$a^{4cd} - p a^{4cd-1} + \alpha$ et $b^{4cd} - P b^{4cd-1} + \alpha$

or si ces deux équations α.

Le nombre des racines d'une équation, et celui qui marque le degré de cette équation sont égaux

Soit l'équation $x^{2m} - px^{2m-1} + \alpha = 0$

en divisant cette expression par son quadratic divisant le quotient $x^{2m-2} - px^{2m-3} + \alpha$

en divisant cette quotient par son quadratic divisant $x^2 - c x + d$ soit le q. $x^{2m-4} - px^{2m-5} + \alpha$

et ainsi de suite. donc l'équation $x^{2m} - \alpha$

$= (x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d) + \alpha$ ~~et~~ que ~~et~~ les jusque

a m diviseurs. et ~~Mp~~ $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b}$, $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - d}$

$\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - d}$, α sont les $2m$ racines.

par avec le precedent que par l'a^m c'est a dire que par une quantité nombre que l'on ait) sera positive mais si on substitue a, dans cette meme equation le resultat sera $-l a^m$ c'est a dire negatif ∴ cette equation a une racine entre a et $x = 0$

Demeure maintenant en substituant $b - x$ et b impetrant demontrer qu'il a une racine entre ces deux quantités nombres de x.

& de plus forte raison si au lieu de p on prend quelque des autres coefficients, les memes raisonnements auront lieu ∴ ce est

Division par un polynome equation ... $x - a$ et par $x - b$ ... aspirant des 2 chacun, termes du reliquat $= 0$; eliminons l. sont

le equation resultant a^m l — p ou ... $= 0$ (on m'a ...

Cette equation est necessairement divisible sans reste par l'equation, des sommes des paires des racines de l'equation proposée.

Car Dem. Soit, l'equation des sommes des paires ~~soit le reliquat~~ ~~par ...~~ ~~, de reste~~ ~~Donc le reliquat~~, reliquat $Ba^m + Ca^m + Da^m + \ldots$ or si nous substituons pour p, q, r ... leur valeurs dans quelque ~~reste~~ que ce soit, ~~c'est~~ reste evanouira. — B egalera 0, C egalera 0 Donc il suit que B C D ... egaux à 0 ~~par les~~ valeurs ~~donc~~ par le relatif ~~de~~ ... dans ces ~~cas~~ ces ~~reliquats~~

* c'est a dire le coté gauche de l'equation

† c'est a dire le coté gauche de l'equation des sommes des paires

‡ par ces real ... a n ~~racines~~ racines.

J'vais le demontrer. Soit $B = Np^v + Np^{v-1} + \&c$ ou
ou N, N', O ou etant fonction de q, r, s ou (sans p)
donc si N, N', O ne sont chacun $= 0$ il n'y peuvent
être plus que v differents valeurs de p que font
B evanouir pendant que q, r, s ou reste fixe. Mais
~~ou~~ quel q'a en infinité de cas reel où p est dif
ferent de q, r, s ou demeure fixe & en tous ces cas $B = 0$
~~des~~ ~~tous les~~ ~~cas~~ ~~reel~~ ~~$p = 0$~~ formelement
$\therefore N = 0$ $N' = 0$ ou $\therefore$ dont tous les cas ~~reel~~ $p = 0$ formelement
de meme mention on a ~~reel~~ ~~N~~ ~~N'~~ ~~O~~ ~~passer~~
de q on peut demontrer que $N = 0$ formelement
en suivant le meme marche on arriverait enfin
a une equation $Hd^w + H'd^{w-1} + H''d^{w-2} + \&c = 0$ (ou
d est le dernier terme d'l'eq ou ~~H~~ ou H' ou H'' ou
Jusqu'les H H' ou sont fonction ~~de la seule lettre~~ ~~d~~
~~d est adin de la lettre que est le coefficient~~
~~de la t ou est pendant~~ ~~Mais~~ ~~dans le eq~~ ou
~~ou~~ & on pourrait demontrer que H H' ou
sont $= 0$ ~~dans~~ ~~tout~~ ~~cas~~ ~~reel~~ ~~est~~ ~~d~~ ~~dans~~ ~~autres~~
de cas ~~que~~ voudra. Mais en fonction ~~sur~~ ~~sur~~ ~~cette~~ ~~lettre~~
~~lettre~~ que est 0 devient 0 en substituant ~~t~~ des
differents quantité ~~pour~~ ~~cet~~ ~~lettre~~ dont le nombre
~~Mais~~ ~~de~~ ~~l'exposant~~ ~~de la plus grand puissance de cette~~
~~lettre~~ ~~est~~ ~~d~~ ~~en~~ ~~profit~~, est reel formelement
$\therefore$ H H' ou sont reel formelement toujours
$\therefore$ $Hd^w + H'd^{w-1}$ ou $= 0$ est reel formelement mais cet
expression est ~~un~~ ~~des~~ ~~coeff~~ ~~d'un~~ ~~des~~ ~~puissance~~ ~~de~~ ~~d^{w}~~ ~~&~~
le raisonnement seul a ~~tous~~ $\therefore$ tous les ~~coeff~~ ~~des~~ ~~puis~~
de ~~d^{w}~~ sont 0 formelement & ainsi on montre jusque a B

pour trouver m en terms de la base du systeme

TM/191916

Soit $\overline{1+a}^{\,mx+nx^2+px^3+qx^4+\alpha x} = 1+x$

donc $mx+nx^2+px^3+\alpha x$ est le Log. de x par definition, ~~etc~~

~~Off~~ celle ce puissance de $1+a$ expandu par le Theorem Binomiale, & arrangé selon les puissances de x, est $1+\overline{ma-\frac{ma^2}{2}+\frac{ma^3}{3}-\alpha}\times x$ $+\alpha x$ ~~(&c~~

pourquoi $1+ma-\frac{ma^2}{2}+\frac{ma^3}{3}-\alpha\times x+\alpha x = 1+x$

par supposition

ou

d'où il suit que, $ma-\frac{ma^2}{2}+\frac{ma^3}{3}-\alpha = 1$ & considerant les ~~nom~~ coefficients de les puissances de x a l'un & l'autre coté $1=1$ &

ou $m = \frac{1}{a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\alpha}$ & suivant la meme façon on pourroit determiner chacun des coeff suivants, savoir n, p, q &c mais serait très difficile d'appercevoir ainsi la loi de leur dépendance sur le premier m.] A fin donc de ~~determiner~~ trouver cette loi, assurément comme deja nous avons $\text{Log}(1+z+z^2) = mz+nz^2+pz^3+\alpha$

= (omettant les puissances de z depuis la premier parce que on ne s'en servira) $mx+nx^2+px^3+\alpha$

$+mz+2nxz+3px^2z+\alpha x$, dont le premier part (mx nx α) est le Log de $1+x$. Soustraisant donc Log $1+x$ de Log $1+z+z^2$ nous avons

$\text{Log}\,\overline{1+z+z^2} - \text{L}\,1+x = mz+2nxz+3px^2z+\alpha$

$Lg\,(1+x) =$

Soit α $mx + nx^2 + px^3 + \alpha$ ~~$L\,1+x$~~

Donc $L(1+x+z) = mx + z + nx + z^2 + \alpha$

= (omettant les puissances de z depuis le premier) par ce moyen ne s'en servira α $mx + nx^2 + \alpha + mz + 2nxz + 3px^2z$

& soustrayant $Lg\,1+x$ de $Lg\,1+x+z$

nous aurons $mz + 2nxz + 3x^2 = Lg\,1+x+z - Lg\,1+x$

$= L\,\frac{1+x+z}{1+x}$ (par calcule du vrai)

$Lg\,(1 + z - xz + x^2z - \alpha) =$ (pris supposé)

$m\,\overline{z - xz + \alpha} + n\,\overline{z - xz + x^2}^2 + \alpha$

= ~~mz~~ omettant ~~chaq~~ puissance de z sauf le premier) $mz + nxz + mx^2z + \alpha$

~~Pour l'al trouve donc que~~

$mz + 2nxz + 3px^2 \cancel{z + x} = mz + \cancel{nxz} + mx^2z$

Egalant donc les coeff. $m = m$

$2n = -m$ ou $n = -\frac{m}{2}$

~~$m = n$; $2m = m$~~

$3p = m$ ou $p = \frac{m}{3}$

ou

& $L\,1+x = mx - \frac{m}{2}x^2 + \frac{m}{3}x^3 + \alpha$. —

Par une route semblable se determinera sans peine le ~~nom~~ nombre en termes ~~de la~~ du Logarithme

Voyez page 198)